Стабильные системы договоров

Данилов В.И., Карзанов А.В. (ЦЭМИ РАН)

Обсуждается понятие стабильных систем договоров. Вводится понятие мета-стабильности и доказывается теорема существования.

Договор – это нечто, главной чертой которого является список *участников договора* (договаривающихся сторон). Кроме того он содержит *условия договора*, которые определяют привлекательность (полезность) этого договора для каждого участника.

Таким образом, формальная модель состоит из четырех данных:

1. Множество C договоров-контрактов.

2. Множество I агентов-участников.

3. Для каждого договора $c \in C$ указано (непустое) множество $P(c) \subseteq I$ участников c. Для участника $i \in I$ обозначим $C(i) = \{c, i \in P(c)\}$ множество договоров, в которых может участвовать i.

4. Так как агент i может заключать несколько договоров, его предпочтения задаются функцией выбора (ФВ) f_i на множестве $C(i)$. Если ему доступно множество (меню) $A \in C(i)$, он заключает (выбирает) $f_i(A) \subseteq A$.

Система договоров – это подмножество $S \subseteq C$. Для $i \in I$ положим $S(i) = S \cap C(i)$. Система S называется *стабильной*, если

a) $S(i) = f_i(S(i))$ для каждого $i \in I$.

b) Нет блокирующих ("соблазнительных") систем. Множество $B \subseteq C$ называется *блокирующим* систему S, если оно не содержится в S и для любого участника i выполняется включение $B(i) \subseteq f_i(S(i) \cup B(i))$.

Первое условие (нидивидуальной рациональностии) понятно – никто не хочет отказаться от предложенных договоров. Второе условие говорит что никто не хочет заключать новые договора (быть может, отказываясь от некоторых старых).

Первый и главный вопрос относительно этого понятия – это вопрос существования. Понятно, что на данные задачи (и в первую очередь на "предпочтения") нужно наложить некоторые условия. Классический подход был бы в том, что на каждом множестве $C(i)$ задана функция полезности u_i, и агент i выбирает наиболее полезный для него договор. Однако такой подход слишком жесткий, потому что вынуждает выбирать единственный договор. Более гибкий подход, принятый в большинстве работ, состоит в том, что ФВ предполагаются *плоттовскими*, то есть удовлетворяющими условию "независимости от пути", введенному Плоттом [5]. Это требование состоит в том, что для любых меню A и B

$$f(A \cup B) = f(f(A) \cup B).$$

В дальнейшем это требование предполагается выполненным. В этом случае в условии b) блокирования можно ограничиться одноэлементными B. Иначе говоря, если для договора $c \in C$ выполнено $c \in f_i(S(i) \cup c)$ для любого $i \in P(c)$, то $c \in S$.

Второе (очень слабое) предположение состоит в том, что у каждого агента i имеется т.н. *автаркический* договор, единственным участником которого является i. В силу требования b) никто не станет заключать договор, который хуже автаркического.

Но и этих условий в общем случае мало для существования стабильного решения. Классическим (и довольно ограничительным) является предположение о двудольности [3]. Неформально это значит, что агенты делятся на две "противоположные" группы, и договора возможны только между участниками противоположных сторон. В этой ситуации стабильные системы договоров существуют и, более того, обладают разными интересными свойствами [4]. Этому посвящена огромная литература; обзор ее дается в [1].

В общем случае существования может не быть. И дальнейшие исследования могут вестись в двух направлениях. Первое – искать дополнительные условия, гарантирующие существование. Второе – искать такое ослабление понятия стабильности, при котором решение существовало бы "всегда". Именно второму направлению посвящена оставшаяся часть выступления. Здесь мы, следуя [2], вводим понятие мета-стабильной системы договоров. Для его формулировки нужно ввести дополнительные понятия.

Скажем, что договор c *доминирует* (по Скарфу) систему S для агента i, если либо $S(i)$ пусто, либо $s \notin f_i(c, s)$ для некоторого $s \in S(i)$. Грубо говоря, в S есть договора, которые хуже c для агента i. Наличие такого договора вызывает у агента i желание отказаться от договора s. Но чтобы такой договор c был реализован, нужно согласие всех его участников.

Определение. Сеть договоров S называется *мета-стабильной*, если нет такого договора c, который доминирует S для всех участников договора c.

Заметим, что в этом случае все $S(i)$ непусты, потому что иначе доминирует автаркический договор.

Чтобы лучше понять смысл требования мета-стабильности, рассмотрим простой случай, когда предпочтения всех участников задаются линейными порядками $\leq_i$. Пусть $\underline{s}_i$ обозначает наихудший (для i) договор в $S(i)$. Доминирование договора d означает, что $d >_i \underline{s}_i$ для всех участиков d. Тогда у них есть стимул заключить d и отказаться от $\underline{s}_i$. Что указывает на некую нестабильность системы S. Отметим также, что неявно здесь предполагается, что агенты ориентируются на наихудший исход.

Полезно также сравнить это понятие со стабильностью. Имеет место

Предложение. *Стабильная система мета-стабильна.*

Набросок док-ва. Пусть система S стабильна. Предположим, что договор d доминирует S. И s_i – тот договор из $S(i)$, который не выбирается из пары $\{s_i, d\}$. Тогда он тем более не выбирается из множества $S(i) \cup d$. Но тогда (используя плоттовость f_i) $d \in f_i(S(i) \cup d)$ для любого $i \in P(d)$, что противоречит стабильности. $\square$

Грубо говоря, ослабление стабильности происходит за счет отказа от индивидуальной рациональности, то есть условия а). Оно заменяется более слабым требованием непустоты $S(i)$, слабым в силу предположения об автаркии. То есть фактически мы допускаем, что некоторые участники могут сохранять участие в договорах, которые им "невыгодны". Это требует некоторого пояснения и оправдания. Участник может отказаться от "плохого" договора, если это не приведет к тому, что кто-то другой останется вообще без договора. Но представим, что отказ i от договора s приводит к тому, что другой агент j останется вообще без договора (то есть до этого было $S(j) = \{s\}$). В этом случае j будет искать и согласится на какой-то другой договор s', который ранее был для него недостаточно хорош. Но тогда другие участники s' могут начать отказываться от своих старых договоров, и это может вызвать каскад перезаключений, исход которого для "инициатора" i трудно предсказать.

Главное достоинство введенного понятия в том, что мета-стабильные системы договоров всегда существуют.

Теорема. *Если C конечно и есть автаркия, а все ФВ f_i плоттовские, то мета-стабильная система договоров существует.*

Доказательство существенно опирается на некоторую общую математическую теорему, интересную саму по себе (и чем-то напоминающую Лемму Скарфа). Представим, что у нас есть конечное множество C "частично определенных" вещественных функций на множестве I. (Частичная определенность означает, что функция определена не на всем I, но только на некотором непустом подмножестве.) Предполагается также, что для любого $i \in I$ имеется "автаркическая" функция, определенная только в точке i.

Определение. Функция $x : I \to \mathbb{R}$ (уже определенная всюду!) называется *компромиссной*, если выполнены два требования:

1) (недоминируемость). Не существует функции $c \in C$, которая строго больше x на области определения c. (В частности, она проходит выше автаркий.)

2) (достижимость). Для любого $i \in I$ существует функция $c \in C$, определенная в i и такая, что $x \leq c$ на области определения c. (В частности, x не слишком большая.)

Теорема о компромиссе. *Компромиссная функция x существует.*

Список литературы

[1] Данилов В.И. Обзор теории стабильных паросочетаний и систем договоров. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2023, том 63, номер 3, с. 144–169.

[2] Danilov V.I., Karzanov A.V. Stable and metastable contract networks. *arXiv*:2202.13089[math.CO].

[3] Gale D., Shapley L.S. College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly* 69 (1962) 9–15.

[4] Fleiner T. A fixed-point approach to stable matchings and some applications. *Math. Oper. Res.* 28 (1) (2003) 103–126.

[5] Plott C.R. Path independence, rationality, and social choice. *Econometrica* 41 (6) (1973) 1075–1091.