Биномиальная байесовская модель купонной облигации

Богомолов Р. О., Хаметов В. М.

1. Доклад посвящен описанию дискретной, однофакторной стохастической модели с дискретным временем купонной облигации. Потребность в таких моделях существует у трейдеров, хеджеров, риск-менеджеров, банкиров поскольку они позволяют:

а) описать вид кривой доходности;

б) установить временную структуру процентных ставок;

в) построить прогноз стоимости облигации (до момента её погашения).

В научной литературе в основном описываются модели бескупонных облигаций и методы их калибровки. Считается, что с помощью дюрационного анализа можно свести описание свойств купонной облигации к бескупонной. Однако обоснование этого утверждения отсутствует. Отметим, что к настоящему моменту времени отсутствует корректное описание купонной облигации.

2. Описание модели купонной облигации. Пусть S_0 - начальная стоимость облигации, S_N - её номинал, а N - момент погашения, C_i - детерминированная доходность i - ой купонной выплаты, $i=\overline{1,l}$ (l - количество купонных выплат), а T_i - момент выплаты купона ($T_i \in \{0,\dots,N\} \overset{\Delta}{=} N_0$).

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана случайная последовательность $\{S_n\}_{n\in N_0}$, описывающая эволюцию стоимости купонной облигации. Предположим, что в моменты T_i, $i=\overline{1,N}$ происходит вмешательство, которое описывается следующим образом

$$S_{T_i} = S_{T_i^-}\left(1+C_i\right), \tag{1}$$

где через $S_{T_i^-}$ обозначена стоимость облигации в момент времени, предшествующий купонной выплате, а через S_{T_i} - обозначена стоимость купонной облигации после осуществления i - ой купонной выплаты. Предположим, что в каждый момент времени $n \in N_0$ наблюдению доступна не только текущая цена облигации S_n, но и ее номинал S_N (т.е. будущее значение ее стоимости). Для описания динамики процесса ценообразования, которое учитывало бы

а) вмешательство в соответствии с формулой (1),

б) что $S_n\big|_{n=0} = S_0$ - начальная стоимость облигации, а $S_n\big|_{n=N} = S_N$ - номинал

используем байессовский подход, поэтому в качестве базовой последовательности возьмем геометрическое несимметричное случайное блуждание

$$S_{n+1} = S_n \lambda_i^{\delta_{n+1}},\ S_n\big|_{n=T_i} = S_{T_i}, \tag{2}$$

где $n \in \{T_i,\dots,T_{i+1}\}$, $i=0,\dots,N-1$, $\{\delta_n\}_{n\in N_0}$ - последовательность независимых случайных величин, принимающих два значения $\{0,1\}$ с вероятностями q и p, соответственно, а $1<\lambda_i$ - величина, зависящая от S_{T_i} и номинала. Очевидно, что для любого $i \in \{0,\dots,N-1\}$ последовательность (2) описывает блуждание по решётке $\{\lambda_i^n\}$ ($n \in \{T_{i,},\dots,T_{i+1}\}$), обозначаемой D_i . В этих предположениях с помощью формулы байесса нами установлено что:

а) для любого $x \in D_i$ и $n \in \{t,\dots,N\}$ $p(S_n = x | S_0,\dots,S_t,S_N) = p(S_n = x | S_t, S_N)$ (марковское свойство последовательности, удовлетворяющей (2) , т.е. условная вероятность $p(S_n = x | S_0,\dots,S_t,S_N)$ не зависит от $S_0,\dots,S_{t-1}$);

б) $p\left(\delta_{n+1}=k\middle|S_n,S_N\right)=\begin{cases}1-\dfrac{\log_{\lambda_i}S_N-\log_{\lambda_i}S_n}{N-n}, \text{если } k=0\\ \dfrac{\log_{\lambda_i}S_N-\log_{\lambda_i}S_n}{N-n}, \text{если } k=1\\ 0, \text{если } k\geq 2 \text{ и } k<-1\end{cases}$

Пусть $a,x\in D_i$ и $n\in\{T_i,\ldots,N-1\}$. Обозначим $\pi_{n,i}(x|a,A)\overset{\Delta}{=}p\left(S_n=x\middle|S_{T_i}=a,S_N=A\right)$.

Тогда $\pi_{n,i}(x|a,A)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\pi_{n+1,i}(x|a,A)=\pi_{n,i}\left(x\lambda_i^{-1}\middle|a,A\right)\frac{\log_{\lambda_i}A-\log_{\lambda_i}x\lambda_i^{-1}}{N-T_i}+\pi_{n,i}(x|a,A)\frac{\log_{\lambda_i}A-\log_{\lambda_i}x}{N-T_i}$$

Процесс удовлетворяет начальному условию $p\left(S_n=x\middle|S_t=a,S_N=A\right)\Big|_{n=t}=\delta_{x,a}$ и с граничному условию $p\left(S_n=x\middle|S_t=a,S_N=A\right)\Big|_{n=N}=\delta_{x,A}$, где $\delta_{x,z}$ - символ Кронекера.

Выше приведенные построения приводят к рекуррентному описанию модели купонной облигации.

Пусть $n\in\{T_i,\ldots,N\}$, $i=\overline{0,N-1}$ - любое и

$$S_{n+1}=S_n\lambda_i^{\delta_{n+1}},\ S_n\big|_{n=T_i}=S_{T_i}\quad, \tag{3}$$

причем условные вероятности

$$P\left(\delta_{n+1}=k\middle|S_n=a,S_N=A\right)=\begin{cases}1-\dfrac{\log_{\lambda_i}A-\log_{\lambda_i}a}{N-n}, \text{если } k=0\\ \dfrac{\log_{\lambda_i}A-\log_{\lambda_i}a}{N-n}, \text{если } k=1\\ 0, \text{если } k\geq 2 \text{ и } k<-1\end{cases}$$

$p\left(\delta_N=k\middle|S_{N-1},A\right)=\delta_{k,\log_{\lambda_i}\frac{A}{S_{N-1}}}$, а $S_n\big|_{n=N}=A$.

Параметрами модели является набор случайных величин $\{\lambda_0,\ldots,\lambda_{N-1}\}$, которые, как легко доказать , вычисляются по формуле

$$\lambda_i=\left(\frac{S_N}{S_{T_i}}\right)^{\frac{1}{(N-T_i)\hat{p}_i}}\quad, \tag{4}$$

где $\hat{p}_i=\dfrac{1}{N-T_i}\displaystyle\sum_{j=T_i+1}^{N}1_{\{\ln S_j>\ln S_{j-1}\}}$, $i=\overline{0,N-1}$.

Отметим, что с помощью формулы (4) легко осуществить калибровку модели.

3. Для модели облигации, описываемой соотношениями (3), (4) было установлено: а) условия отсутствия арбитражных возможностей, т.е. существование мартингальной вероятностной меры,
б) значения волотильности для этой модели,
в) описан и обоснован алгоритм её имитационного моделирования.

Результаты имитационного моделирования показали хорошее совпадение с реальными данными.